Parcijalni izvodi

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

Izvod funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u tački a definisali smo kao

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

- Ova definicija nema smisla kad je g funkcija više promjenljivih, jer ne znamo šta je $\frac{1}{h}$ ako je h vektor.
- Možemo, medjutim da fiksiramo jednu promjenljivu, a da variramo drugu (tako dobijamo parcijalni izvod), ili da fiksiramo pravac i posmatramo promjenu funkcije po tom pravcu (tako dobijamo izvod po pravcu).

- Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dvije promjenljive x i y.
- y fiksiramo, tj. $y = b$.
- Tada je $g(x) = f(x, b)$ funkcija jedne realne promjenljive x.

Ako g ima izvod u tački a, tada kažemo da je to **parcijalni izvod funkcije f po x u tački** (a, b) i označavamo ga sa $f_x(a, b)$ ili $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Dakle,

$$f_x(a,b) = g'(a) \quad \text{gdje je} \quad g(x) = f(x,b)$$

tj.

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

Slično, parcijalni izvod funkcije f po y u tački (a, b) definišemo kao

$$f_y(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

ako postoji gornja granična vrijednost.

Koristimo oznake:

$$f_y(a, b) = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Pravilo za računanje parcijalnog izvoda funkcije $z = f(x, y)$

1. f_x odredjujemo tako što y posmatramo kao konstantu i diferenciramo $f(x, y)$ po x.
2. f_y odredjujemo tako što x posmatramo kao konstantu i diferenciramo $f(x, y)$ po y.

Primjer 1. Naći f_x i f_y funkcije

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Posmatrajmo y kao konstantu i diferencirajmo $f(x, y)$ po x:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3.$$

Sada, posmatrajmo x kao konstantu i diferencirajmo $f(x, y)$ po y:

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

$\boxdot$

Primjer 2. Naći $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ funkcije

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right).$$

Koristeći pravilo za izvod složene funkcije jedne promjenljive, dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos\left(\frac{0}{1+0}\right)\cdot\frac{1}{1+0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{x}{(1+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\cos\left(\frac{0}{1+0}\right)\cdot\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

Primjer 3: Izračunati f'_x i f'_y u tački $(0,0)$, gdje je

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Funkcija je definisana na različite načine u različitim tačkama pa ne možemo da fiksiramo jednu promjenljivu i primjenimo pravila diferenciranja na drugu promjenljivu (kao u prethodnim primjerima). Izvod tražimo po definiciji

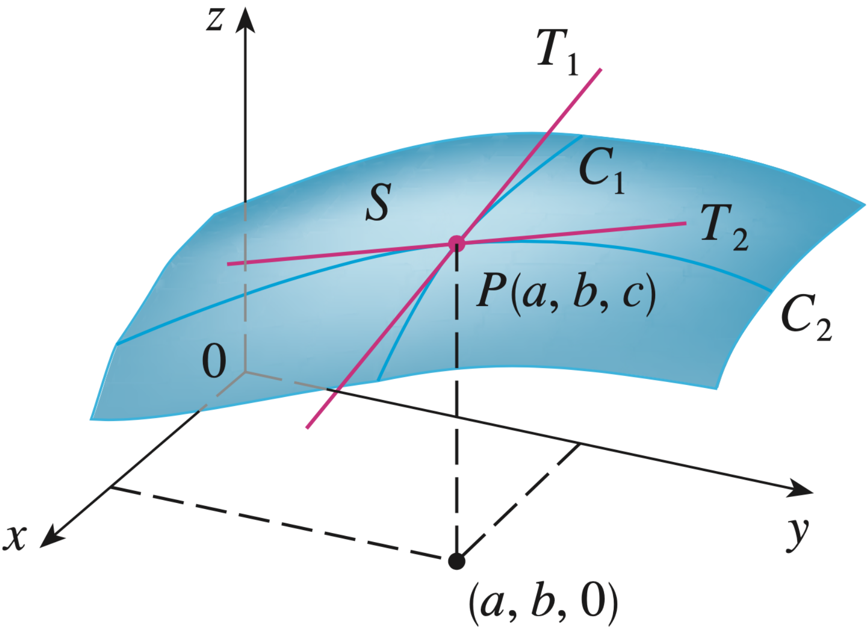
$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3-0^3}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1.$$

Slično

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^3-h^3}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1.$$

Geometrijska interpretacija parcijalnog izvoda

- Da bi nam bila jasna geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda, podsetimo se da jednačina $z = f(x, y)$ predstavlja neku površ S.
- Ako je $f(a, b) = c$, onda tačka $P(a, b, c)$ leži na S. Kada fiksiramo $y = b$, dobijamo krivu C_1 koja je presjek vertikalne ravni $y = b$ i površi S.
- Tako isto vertikalna ravan $x = a$ siječe površ S po krivoj C_2.
- Obje krive C_1 i C_2 prolaze kroz tačku P.


z
T1
C1
S
T2
P(a, b, c)
C2
0
x
y
(a, b, 0)

Primijetimo:

- C_1 je grafik funkcije $g(x) = f(x, b)$, tako da nagib (koeficijent pravca) njene tangente T_1 u tački P je $g'(a) = f_x(a, b)$;
- C_2 je grafik funkcije $G(y) = f(a, y)$, tako da nagib njene tangente T_2 u tački P je $G'(b) = f_y(a, b)$.

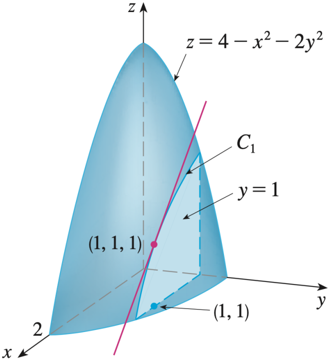
Dakle, f_x i f_y su nagibi tangenti na krive C_1 i C_2 redom, u tački $P(a, b, c)$.

Parcijalni izvod se može takodje interpretirati i kao brzina promjene.

Ako je $z = f(x, y)$, tada:

- $\frac{\partial z}{\partial x}$ predstavlja brzinu promjene z u odnosu na x kada je y fiksirano.
- Slično, $\frac{\partial z}{\partial y}$ predstavlja brzinu promjene z u odnosu na y kada je x fiksirano.

Primjer 4. Neka je $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Naći $f_x(1,1)$ i $f_y(1,1)$ i interpretirati ove brojeve kao nagibe.



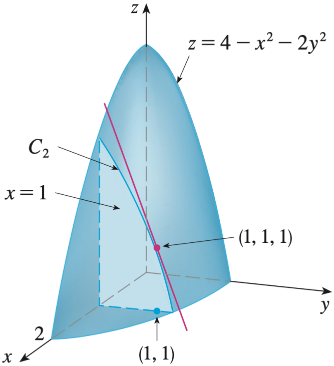
Imamo

$$f_x(x,y) = -2x \qquad f_x(1,1) = -2$$

$$f_y(x,y) = -4y \qquad f_y(1,1) = -4$$

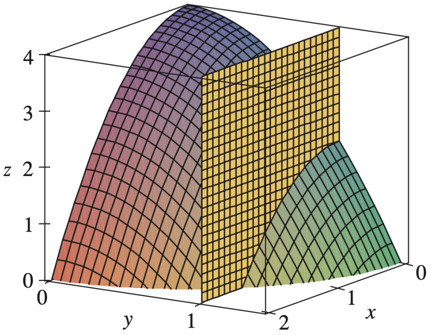
Grafik funkcije f je paraboliod $z = 4 - x^2 - 2y^2$ i vertikalna ravan $y = 1$ ga preseca po paraboli $z = 2 - x^2, y = 1$.

Nagib tangente na parabolu u tački $(1,1,1)$ je $f_x(1,1) = -2$.

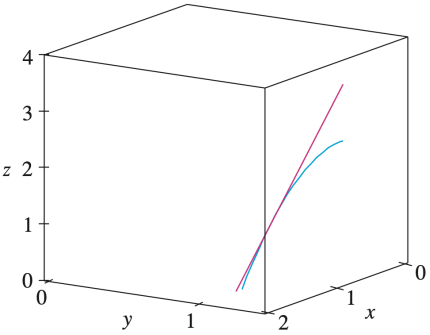


Slično, ravan $x = 1$ siječe grafik funkcije f po paraboli $z = 3 - 2y^2, x = 1$.

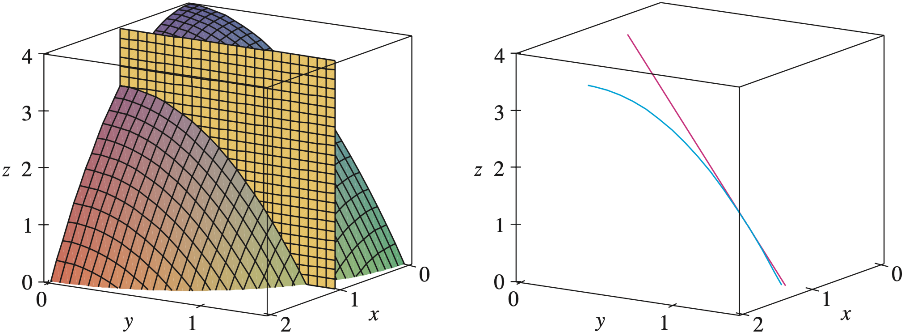
Nagib tangente na ovu parabolu u tački $(1, 1, 1)$ je $f_y(1, 1) = -4$.



z
0
1
2
3
4
y
1
x
2



z
0
1
2
3
4
y
1
x
2



4
3
z
2
1
0
0
y
1
2
1
x
0
4
3
z
2
1
0
0
y
1
2
1
x
0

Parcijalni izvodi implicitno zadatih funkcija

Neka je funkcija $z = z(x, y)$ implicitno definisana jednačinom

$$F(x, y, z) = 0.$$

Tada po pravilu diferenciranja složene funkcije imamo

$$F'_x + F'_z z'_x = 0 \implies z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ F'_z \neq 0$$

$$F'_y + F'_z z'_y = 0 \implies z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},\ F'_z \neq 0$$

Primjer 5. Naći $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je z definisana implicitno kao funkcija od x i y sa

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Da bismo pronašli $\frac{\partial z}{\partial x}$, diferenciramo implicitno u odnosu na x, pazeći da smatramo y konstantom:

$$2x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Rješavajući jednačinu po $\frac{\partial z}{\partial x}$, dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Parcijalni izvodi funkcija više promjenljivih

Parcijalni izvodi se mogu definisati i za funkcije tri ili više promjenljivih, na primjer

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

Uopšte, ako je $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ onda

$$\lim_{h\to\infty} \frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)}{h}$$

$$= \frac{u}{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = f_i' = D_i f$$

Primjert 6. Naći f_x, f_y i f_z ako je $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Smatrajući y i z konstantama i diferenciranjem u odnosu na x, dobijamo

$$f_x = ye^{xy} \ln z.$$

Slično,

$$f_y = xe^{xy} \ln z \qquad f_z = e^{xy}/z$$

$\boxdot$